UFF - Universidade Federal Fluminense
IME - Instituto de Matemática e Estatística
GGM - Departamento de Geometria
Disciplinas: GGM 00127, GGM 00125 , GGM 00160

2^a Lista de Exercícios - Conteúdo de Geometria Analítica Plana
Retas e círculos

AQUECIMENTO

---

1. Dê as equações paramétricas e cartesiana da reta r, fazendo um esboço da mesma:
   - r pelos pontos $(2,1)$ e $(3,4)$.
   - r é perpendicular ao vetor $(1,3)$ que passa pelo ponto $(1,0)$.
   - r é paralela ao vetor $(1,3)$ que passa pelo ponto $(1,-1)$.

2. Determine as equações paramétricas das seguintes retas.
   - $2x - 5y = 3$.
   - $x = 3y$.
   - $x - 4 = 0$

3. Dadas as equações paramétricas das retas abaixo, determine a equação cartesiana de cada uma e diga quais delas representam a mesma reta.
   - $r_1 : \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = -2t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$
   - $r_2 : \begin{cases} x = -6t - 2 \\ y = 4t + 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$
   - $r_3 : \begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

4. Decida se cada uma das equações abaixo define uma círculo, um ponto ou um conjunto vazio:
   (a) $2x^2 + 2y^2 - 3x + y - 1 = 0$;
   (b) $-x^2 - y^2 + 6x - 4y + 3 = 0$;
   (c) $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 26 = 0$;
   (d) $4x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 21 = 0$.

BÁSICO

---

1. Verifique se as retas dadas em cada item são ou não são paralelas.
   - $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ e $3x + y = 1$.
   - $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ e $x + y = 0$.

2. Encontre o ponto de interseção das retas r, pelos pontos A e B, e s, pelos pontos C e D, nos casos abaixo:
   (a) $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (1,1)$ e $D = (1,2)$.
   (b) $A = (2,1)$, $B = (1,1)$, $C = (0,1)$ e $D = (2,2)$.
   (c) $A = (3,1)$, $B = (2,2)$, $C = (0,1)$ e $D = (-1,2)$.
   (d) $A = (1,2)$, $B = (2,3)$, $C = (-1,1)$ e $D = (1,5)$.
   (e) $A = (-1,0)$, $B = (2,3)$, $C = (-2,1)$ e $D = (3,-4)$.

3. Encontre a interseção das retas abaixo:

   - $r: 4x + y = 4$ e $s: 3x - 2y = 5$.
   - $r: 2x + 6y = -6$ e $s: \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 1 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.
   - $r: \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 2t - 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, e $s: \begin{cases} x = -t - 5 \\ y = 1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.
   - $r: x - 2y = 0$, $s: y = 4x$ e $l: \begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.
   - $r: 2x + y = 1$, $s: 3x + 4y = 2$ e $l: y - 5x = 5$.
   - $r: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 2 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, $s: \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 1 - \frac{2}{3}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ e $l: \begin{cases} x = t - 1 \\ y = 4t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

4. Em cada um dos itens abaixo, determine, se existir, o ponto de interseção dos segmentos AA' e BB'. Se os segmentos não se interceptarem, decida de eles pertencem a retas concorrentes, paralelas ou coincidentes.

   (a) $A = (1, 3)$, $A' = (2, -1)$, $B = (-1, 1)$ e $B' = (4, 1)$.

   (b) $A = (0, 0)$, $A' = (1, 1)$, $B = (3, 4)$ e $B' = (-1, 5)$.

   (c) $A = (1, 234)$, $A' = (0, 123)$, $B = (317, 240)$ e $B' = (315, 18)$.

   (d) $A = (2, 5)$, $A' = (3, 6)$, $B = (18, 21)$ e $B' = (40, 43)$.

5. Determine $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que o ponto $(1, \lambda)$ esteja na reta $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

6. Determine as equações paramétricas e cartesiana da reta s:

   - que passa pelo ponto P e é paralela à reta r, onde $P = (1, 3)$ e $r: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.
   - que passa pelo ponto P e é perpendicular à reta r, onde $P = (1, 3)$ e $r: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.
   - que passa pelo ponto P e é perpendicular à reta r, onde $P = (1, 2)$ e $r: 2x - 5y = 2$.
   - paralela à reta $2x + 5y = 1$ que passa pelo ponto $(1, 2)$.
   - perpendicular à reta $y = 3x + 1$ que passa pelo ponto $(-3, 1)$.
   - perpendicular à reta $x = 3$ que passa pelo ponto $(2, 0)$.

7. Determine a e b de modo que as equações $\begin{cases} x = at + 1 \\ y = bt + 5 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, sejam uma representação paramétrica da reta $y = 2x + 3$.

8. Mostre que as retas $5x - y - 6 = 0$, $x + 5y = 22$; $5x - y = 32$ e $x + 5y + 4 = 0$ formam um quadrado.

9. Uma reta que passa pela interseção das retas $7x - 2y = 0$ e $4x - y = 1$ é perpendicular à reta $3x + 8y = 19$. Determine sua equação.

10. Determine que condições a e b devem satisfazer para que as retas $2y = ax + b$ e $y = 2x + a$ sejam paralelas.

11. Determine a equação da mediatriz do segmento AB, onde $A = (2, 3)$ e $B = (5, 4)$.

12. Sejam $A = (1, 0)$, $B = (2, 2)$ e $C = (0, -3)$ pontos no plano.

    (a) Encontre os pontos na reta r que distem $\sqrt{2}$ do ponto C.

    (b) Encontre os pontos na reta l que são equidistantes de A e B.

    (c) Encontre o ponto P equidistante de A, B e C.

13. Faça um esboço do conjunto de pontos que satisfaz à equação $|y| = 2x - 1$.

14. Achar a área do triângulo formado pelo ponto $A = (3, 4)$ e pelos pontos B e C, em que a reta $x + y = 1$ encontra os eixos coordenados.

15. Considere os pontos $A = (5, 0)$, $B = (3, 4)$ e a reta $r: x + 4y = 5$. Determine $C \in r$ de modo que AB e AC são lados de um triângulo de área 7.

16. Obtenha a equação da círculo que passa pelos pontos $A = (2, 4)$, $B = (3, 1)$ e $C = (5, 3)$.

17. Qual é a equação da círculo que passa por $A = (1, 2)$, $B = (3, 4)$ e tem o centro sobre o eixo OY?

18. Escreva a equação da círculo que tem centro no ponto $P = (2, 5)$ e é tangente à reta $y = 3x + 1$.

1. Mostre que, válido pra todos os valores de a, as retas $y = ax + 3 - 5a$ passam pelo mesmo ponto. Que ponto é esse?

2. Faça um esboço da reta $y = ax + b$ quando $ab > 0$. Idem para $ab < 0$.

3. Sejam $P = (1, 2)$ e $Q = (-2, -2)$.

   (a) Determine a equação cartesiana da reta que passa por P e Q.

   (b) Determine as coordenadas dos pontos que estão sobre a reta do item anterior e cuja distância ao ponto Q é o dobro da distância ao ponto P.

   (c) Determine as coordenadas dos pontos que estão sobre a reta do item (a) e cuja distância ao ponto Q é λ vezes a distância ao ponto P, onde $\lambda > 0$.

4. Determine (se for possível) $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que as retas $x + 2y = 1$; $3x - y = 2$ e $x + y = \lambda$ se encontrem duas a duas, em três pontos que sejam os vértices de um triângulo de área 4.

5. Esboce a família de retas descritas pela equação $3y = \lambda x + 3,\ 0 \leq \lambda \leq 3$.

6. Determine, com um único parâmetro e dando seu domínio de variação, uma equação que descreva a família de todas as retas que tem a seguinte propriedade: o triângulo formado pelas retas e pelos eixos coordenados tem área 2 e está situado no primeiro quadrante.

7. A tangente, no ponto P, à círculo de centro em O e raio 3 é paralela à reta $y = -2x + 1$. Quais são as coordenadas de P? E se o raio da círculo fosse 5?

8. Considere os pontos $A = (1, 1)$, $B = (4, 5)$ e a reta $r : x + 3y = 4$. Determine $C \in r$ de modo que AB e AC são lados de um paralelogramo de área 10.

9. O que representa no plano a equação $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 0$.

10. Seja $ABCD$ um paralelogramo com lado AB sobre a reta $r : x + 2y = 1$, e uma das diagonais sobre a reta $s : x + y = 2$. Se o ponto médio da diagonal AC é o ponto $M = (1, 1)$ e as diagonais são perpendiculares, determine os vértices A, B, C e D e a área do paralelogramo.